

УДК 517.968, 517.983.37
doi: 10.21685/2072-3040-2024-3-3

Решение задачи локализации неоднородности в объекте с известным коэффициентом преломления

Н. И. Терехин¹, А. А. Цупак²

^{1,2}Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

²altsupak@yandex.ru

Аннотация. *Актуальность и цели.* Цель работы – разработка и программная реализация метода перебора для решения обратной задачи дифракции. *Материалы и методы.* Для решения задачи используется метод интегральных уравнений; для численного решения уравнения Липпмана – Швингера применяется метод коллокаций; для эффективного решения систем линейных алгебраических уравнения применяется специальный способ обращения суммы матриц. *Результаты.* Разработан эффективный метод решения задачи локализации области неоднородности с известным коэффициентом преломления. *Выводы.* Предложенный метод может использоваться для решения задачи микроволновой томографии при небольшом количестве измерений поля.

Ключевые слова: обратная задача дифракции, микроволновая томография, уравнение Липпмана – Швингера, метод коллокаций, одноранговое возмущение обратимых матриц, локализация неоднородности сложной формы

Финансирование: работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках государственного задания на проведение НИР, регистрационный номер 124020200015-7.

Для цитирования: Терехин Н. И., Цупак А. А. Решение задачи локализации неоднородности в объекте с известным коэффициентом преломления // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2024. № 3. С. 31–42. doi: 10.21685/2072-3040-2024-3-3

Solution of the inhomogeneity localization problem in objects with the given index refraction index

N.I. Terekhin¹, A.A. Tsupak²

^{1,2}Penza State University, Penza, Russia

²altsupak@yandex.ru

Abstract. *Background.* The purpose of the work is the development and software implementation of the brute force method for solving inverse diffraction problem. *Material and methods.* For solving the problem integral equations approach is used; for the numerical solution of the Lippmann – Schwinger equation, the collocation method is applied; for the effective solution of systems of linear algebraic equations, a special method of matrix inversion is used. *Results.* An efficient method for solving the problem of localization of a region of inhomogeneity with a given refractive index has been developed. *Conclusions.* The proposed method can be used for solving problems of microwave tomography with a small number of field measurements.

Keywords: inverse diffraction problem, microwave tomography, Lippmann – Schwinger equation, collocation method, peer perturbation of reversible matrices, localization of heterogeneity of complex shape

Financing: the research was carried out within the state assignment of Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Reg. No. 124020200015-7).

For citation: Terekhin N.I., Tsupak A.A. Solution of the inhomogeneity localization problem in objects with the given index refraction index. *Izvestiya vysshihkh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2024;(3):31–42. (In Russ.). doi: 10.21685/2072-3040-2024-3-3

Введение

Обратные задачи дифракции – задачи определения параметров, описывающих свойства рассеивателей акустических или электромагнитных волн – не теряют своей актуальности на протяжении нескольких десятилетий. Интерес исследователей к этим задачам обусловлен прежде всего их применением в различных областях: радиолокации, медицине и т.д.

Основные трудности в исследовании соответствующих математических моделей связаны с тем, что обратные задачи дифракции являются плохо обусловленными. Так, в итерационных методах, основанных на минимизации функционалов, возникают проблемы, связанные с невыпуклостью этих функционалов и множественностью экстремумов [1].

Одним из альтернативных методов исследования является неитерационный двухшаговый метод [2, 3] восстановления показателя преломления по результатам вычислений поля вне рассеивателя. Для реализации метода требуется достаточно большое количество известных значений поля (в методе коллокаций для решения интегрального уравнения это число равно числу базисных функций и может достигать нескольких тысяч).

В связи с этим актуальной является разработка метода решения задачи восстановления неоднородности рассеивателя, не требующего столь большого числа измерений поля вне исследуемого рассеивателя.

В данной работе описана эффективная реализация метода полного перебора для решения скалярной двумерной обратной задачи дифракции при условии, что значения кусочно-постоянного коэффициента преломления рассеивателя заранее известны, а задача сводится к отысканию подобластей, в которых эти значения принимаются.

Фактически речь идет о решении задачи локализации неоднородности известного типа. Такие задачи представляют самостоятельный интерес (например, при обнаружении веществ или объектов с известными свойствами) и являются частью решения более общей задачи (обратной задачи дифракции).

Идея метода полного перебора чрезвычайно проста: необходимо сначала решить серию прямых задач дифракции при всех способах расположения неоднородного включения, а затем выполнить сравнение значений рассеянного поля вне тела, отвечающих решениям этих задач, с экспериментальным полученным значением. Решение прямой задачи, для которого это отклонение минимально (а в идеальном случае равно нулю), и описывает истинное расположение неоднородности.

Очевидный недостаток такого подхода состоит в необходимости решения огромного числа (десятки тысяч и более) прямых задач дифракции.

В данной статье предлагается подход, основанный на специальном методе обращения суммы двух матриц, одна из которых имеет ранг, равный

единице. В работе описаны результаты вычислительных экспериментов, проведен анализ метода перебора и определены границы его применимости для решения обратной задачи дифракции.

1. Прямая и обратная задачи дифракции

В однородном пространстве $\mathbb{R}^2$ с заданным значением волнового числа $k_0 > 0$ рассмотрим ограниченную неоднородную область Q с кусочно-постоянным коэффициентом преломления $n(x)$; в Q положим $k(x) := k_0 n(x)$. Падающая акустическая волна является монохроматической с заданной круговой частотой $\omega > 0$.

Прямая задача дифракции состоит в отыскании полного поля в области Q (а также вне ее), если коэффициент преломления в Q известен.

В *обратной задаче* дифракции требуется определить неизвестную функцию $k(x)$ (или $n(x)$) по заданным вне Q значениям полного поля.

Подробное описание полных математических постановок таких задач приведено, например, в работах [2–4]. Отметим, что прямая задача дифракции эквивалентна системе, состоящей из интегрального уравнения Липпмана – Швингера в Q и интегрального представления полного поля вне Q :

$$u(x) - \int_Q G(x, y) u(y) (k^2(y) - k_0^2) dy = u_0(x), \quad x \in Q, \quad (1)$$

$$u(x) = \int_Q G(x, y) u(y) (k^2(y) - k_0^2) dy + u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{Q}, \quad (2)$$

здесь $G(x, y)$ – фундаментальное решение двумерного уравнения Гельмгольца [5],

$$G(x, y) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k_0 |x - y|).$$

Для удобства изложения идеи предлагаемого метода решения обратной задачи дифракции сделаем следующее упрощение ее постановки. Будем предполагать, что рассеиватель – прямоугольник $Q = [a_1; b_1] \times [a_2; b_2]$, представленный объединением прямоугольных конечных элементов Q_j , $j = 1, \dots, n$ (рис. 1). Пусть функция $k(x)$ принимает всего два (известных заранее) значения k_1 и k_2 : в одной из подобластей Q_{m_0} (какой именно, неизвестно) $k(x) = k_2$, а в $Q \setminus Q_{m_0}$ коэффициент преломления равен k_1 .

Таким образом, упрощенная задача дифракции сводится к определению номера m_0 подобласти, в которой $k(x) = k_2$.

2. Метод перебора для решения обратной задачи дифракции

Будем решать задачу об определении номера m_0 методом *полного перебора*. Для этого сначала при каждом $m = 1, \dots, n$ решим прямую задачу дифракции с коэффициентом преломления

$$k_{(m)}(x) = \begin{cases} k_2, x \in Q_m, \\ k_1, x \notin Q_m, \end{cases}$$

а затем сравним значение полного поля вне области неоднородности, вычисленное по найденному решению, с известным значением поля.

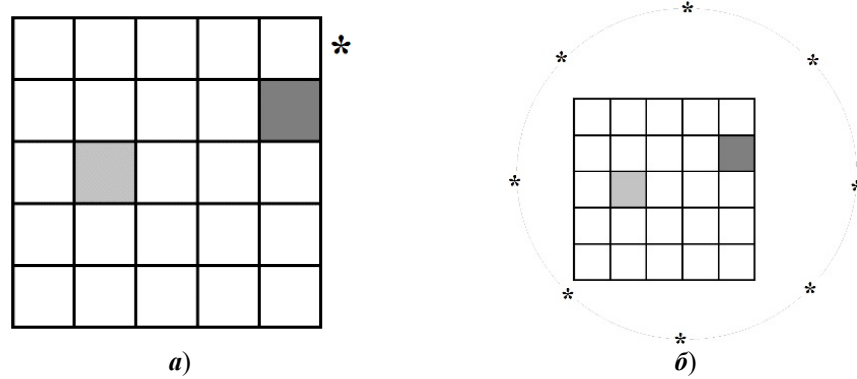


Рис. 1. Область неоднородности Q : темно-серым цветом выделено истинное местоположение подобласти неоднородности Q_{m_0} с коэффициентом k_2 , светло-серым – одно из тестируемых местоположений, звездочками – точки наблюдения полного поля

Недостатком такого подхода к решению обратной задачи является необходимость решения достаточно большого числа интегральных уравнений. Ниже описана методика эффективного решения этой проблемы.

Для каждого $m = 1, \dots, n$ введем функцию $v_{(m)}(x) := (k_{(m)}^2(x) - k_0^2)u_{(m)}(x)$ и будем рассматривать интегральные уравнения, эквивалентные уравнению (1):

$$l_{(m)}(x) \cdot v_{(m)}(x) - \int_Q G(x, y) v_{(m)}(y) dy = u_0(x), \quad x \in Q, \quad (3)$$

где $l_{(m)}(x) = (k_{(m)}^2(x) - k_0^2)^{-1}$.

В рассматриваемом случае функции $l_{(m)}(x)$ кусочно-постоянны:

$$l_{(m)}(x) = \begin{cases} (k_2^2 - k_0^2)^{-1}, x \in Q_m, \\ (k_1^2 - k_0^2)^{-1}, x \notin Q_m. \end{cases}$$

В работе [6] показано, что уравнение (1), а следовательно и (3), однозначно разрешимо.

Приближенные решения интегрального уравнения (3) будем искать методом коллокаций в виде $v_{(m)}(x) = \sum_{j=1}^n c_j \chi_j(x)$; коэффициенты c_j определим из системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$A_{(m)}c = f,$$

где

$$f_i = u_0(\xi_i), (A_{(m)})_{ij} = \delta_{ij}l_{(m)}(\xi_i) - \int_{Q_j} G(\xi_i, y)dy,$$

здесь δ_{ij} – дельта Кронекера; ξ_i – узлы коллокации (например, центры подобластей Q_i).

Заметим, что при различных m матрицы $A_{(m)}$ отличаются единственным элементом – диагональным элементом с номером m . Это наблюдение и позволит не только быстро сформировать основные матрицы для решения большого числа прямых задач дифракции, но и быстро обратить их. Ниже будет показано, что на самом деле нам понадобится лишь одно заполнение матрицы СЛАУ и одно ее «полноценное» обращение.

Воспользуемся следующим утверждением [7].

Утверждение. Пусть матрицы A , $(A+B)$ обратимы, ранг матрицы B равен единице. Тогда след $g := tr(BA^{-1})$ не равен -1 и верна формула обращения суммы матриц

$$(A+B)^{-1} = A^{-1} - (1+g)^{-1} A^{-1} B A^{-1}.$$

Введем обозначение $(k_1^2 - k_0^2)^{-1} =: l$ и рассмотрим матрицу A :

$$(A)_{ij} = \delta_{ij}l - \int_{Q_j} G(\xi_i, y)dy.$$

Теперь матрицы $A_{(m)}$ могут быть представлены в виде

$$A_{(m)} = A + B_{(m)}, \quad B_{(m)} = \text{diag}\{0, \dots, 0, l_{(m)} - l, 0, \dots, 0\}.$$

То есть матрица $B_{(m)}$ имеет лишь один отличный от нуля диагональный элемент. Введем обозначения:

$$l_{(m)} - l =: \lambda_{(m)}, \quad (A^{-1})_{ij} = \alpha_{ij},$$

вычислим след матрицы $B_{(m)}A^{-1}$:

$$g_{(m)} = l_{(m)}\alpha_{mm},$$

последовательно найдем:

$$(A^{-1}B_{(m)})_{ij} = \lambda_{(m)} \begin{pmatrix} 0 & \dots & \alpha_{1m} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \alpha_{2m} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \alpha_{nm} & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$$(A^{-1}B_{(m)}A^{-1})_{ij} = \lambda_{(m)} \begin{pmatrix} \alpha_{1m}\alpha_{m1} & \alpha_{1m}\alpha_{m2} & \dots & \alpha_{1m}\alpha_{mn} \\ \alpha_{2m}\alpha_{m1} & \alpha_{2m}\alpha_{m2} & \dots & \alpha_{2m}\alpha_{mn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{nm}\alpha_{m1} & \alpha_{nm}\alpha_{m2} & \dots & \alpha_{nm}\alpha_{mn} \end{pmatrix}.$$

Итак, получим формулу для обращения матриц $(A + B_{(m)})$:

$$\left((A + B_{(m)})^{-1}\right)_{ij} = (A^{-1})_{ij} - \frac{\lambda_{(m)}}{1 + g_{(m)}} (A^{-1})_{im} (A^{-1})_{mj}.$$

В табл. 1 приведены результаты сравнения времени обращения матриц методом Гаусса (t_1) и вышеизложенным методом (t_2) для нескольких значений параметра разбиения n_0 и соответствующих значений порядка матрицы $n = (n_0)^2$.

Таблица 1

Время обращения суммы двух матриц

n_0	10	20	40	50	80
n	100	400	1600	2500	6400
t_1 , с	0,003	0,22	14,5	54	882
t_2 , с	$<10^{-6}$	0,001	0,015	0,036	0,35

В табл. 2 приведены результаты сравнения времени решения обратной задачи дифракции методом перебора: t_1 – время с многократным заполнением матриц и обращением, t_2 – вышеизложенным методом (для нескольких значений параметра разбиения n_0 и соответствующих значений порядка матрицы $n = (n_0)^2$).

Таблица 2

Время решения обратной задачи дифракции

n_0	4	8	12	16	20	24	28	32
n	16	64	144	256	400	576	784	1024
t_1 , с	0,13	3,1	26	130	474	1392	2598	4125
t_2 , с	0,01	0,074	0,29	0,92	2,45	5,8	13	24

3. Вычислительные эксперименты

В качестве рассеивателя рассмотрим квадрат $Q = [a; b]^2 = [0; \lambda]^2$. В области Q введем равномерную сетку и узлы коллокации:

$$x_{1,i} = x_{2,i} = a + \frac{b-a}{n_0}i, \quad \xi_i = a + \frac{b-a}{n_0}(i + 0,5);$$

где параметр разбиения n_0 может варьироваться (ниже будут рассмотрены случаи с $n_0 = 10, 20, \dots$). Базисные функции $\chi_j(x)$ – индикаторы элементарных прямоугольников,

$$Q_j = Q_{j_1 j_2} = [x_{1,j_1}; x_{1,j_1+1}) \times [x_{2,j_2}; x_{2,j_2+1}).$$

Функция $k(x)$ имеет вид

$$k(x) = \begin{cases} (2+i)k_0, & x \in Q_{n_0/2, n_0/2}, \\ (3+1.5i)k_0, & x \notin Q_{n_0/2, n_0/2}, \end{cases}$$

где i – мнимая единица.

Таким образом, в модельной задаче при любом значении параметра разбиения левый нижний угол искомой подобласти расположен в центре квадрата Q . Падающее поле имеет вид $u_0(x) = u_0(x_1, x_2) = e^{ik_0 x_2}$.

Решение модельной обратной задачи дифракции состоит из нескольких этапов. На первом этапе решается прямая задача дифракции: из уравнения (1) для данной функции $k(x)$ находится поле $u(x)$ в области неоднородности Q . На втором этапе при каждом $m = 1, \dots, n$ сначала находится решение $v_{(m)}(x)$ интегрального уравнения (1), а затем в заранее выбранной точке $x_* \notin \bar{Q}$ вычисляется целевая функция (функция ошибки):

$$f(m) = \left| u(x_*) - u_0(x_*) - \int_Q G(x, y) v_m(y) dy \right|, \quad x_* \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{Q}.$$

Здесь $u(x_*)$ – значение полного поля вне тела, вычисленное по формуле представления (2) и отвечающее точному решению задачи дифракции (точка x_* отмечена на рис. 1, a звездочкой).

На рис. 2 представлены значения функции ошибки $f_m(x_*)$ для $n_0 = 8, 16, 32$. На горизонтальной оси откладываются значения параметра m (значение $m = m_0$ соответствует истинному расположению неоднородности). На рис. 2 хорошо различимы несколько локальных минимумов функции ошибки; именно их наличие и затрудняет применение оптимизационных методов.

Тем не менее в каждом из проведенных тестов расположение неоднородности было однозначно восстановлено: при $m = m_0$ значение функции ошибки варьировалось в пределах от 10^{-17} до 10^{-15} , в то время как наименьший из «ложных» локальных минимумов был равен 10^{-6} .

Наличие локальных минимумов функции ошибки приводит к ухудшению результативности поиска неоднородности в случае, когда измерение поля вне рассеивателя Q выполнено с некоторой погрешностью. При решении задач микроволновой томографии погрешность измерения может быть обусловлена не только точностью работы измерительного прибора, но и более сложной структурой среды, окружающей исследуемый объект: помимо него

в реальной ситуации могут присутствовать иные поглощающие/рассеивающие волну объекты, наличием которых часто пренебрегают при разработке математической модели.

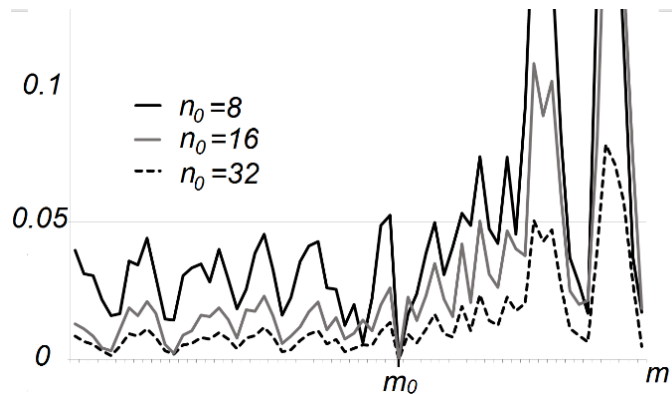


Рис. 2. Графики функции ошибки ($n_0 = 8, 16, 32$)

Моделирование шума осуществляется следующим образом. Как и ранее, после решения прямой задачи дифракции вычисляется эталонное значение $u(x_*)$ поля вне рассеивателя. Далее это значение умножается на число $(1 + \nu)$, где ν – случайное вещественное число из интервала $(-\nu_0, \nu_0)$; параметр ν_0 назовем уровнем зашумления.

На рис. 3 показаны графики функции ошибки $f(m)$ при различных уровнях зашумления данных о поле в точке x_* . С ростом параметра ν_0 отыскание истинного положения неоднородности становится более затруднительным, а начиная с некоторого значения и вовсе невозможным. Так, при $\nu_0 = 0,0125$ истинное положение неоднородности установить не удастся: целевая функция $f(m)$ достигает минимума при значении $m = \tilde{m}$, отвечающем ячейке в правом верхнем углу области Q .

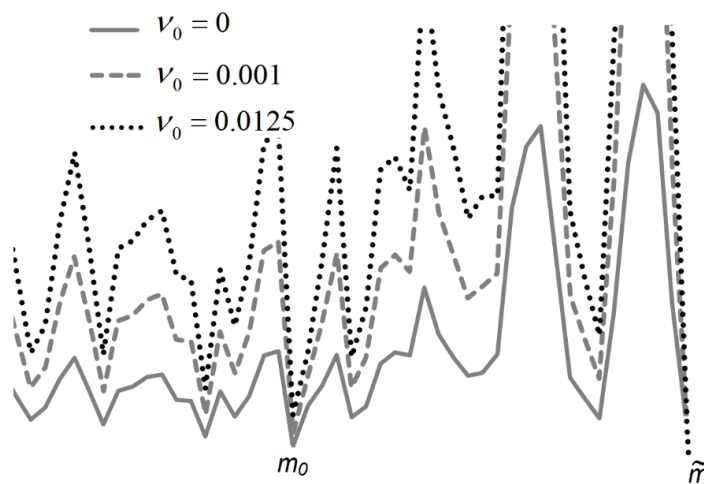


Рис. 3. Функция ошибки при различных значениях уровня шума ($n_0 = 8$)

В табл. 3 приведены предельно допустимые значения $\bar{v}_0$ уровня шума v_0 , при котором удастся восстановить истинное расположение неоднородности. Значения параметра $\bar{v}_0$ ожидаемо уменьшаются с ростом числа ячеек сетки: чем меньше ячейка сетки (и, соответственно, искомая подобласть неоднородности), тем менее различимыми становятся значения поля $u_m(x_*) = u_0(x_*) + \int_Q G(x_*, y) v_m(y) dy$ при разных m . Негативный эффект, вы-

званный искажением значений поля вне рассеивателя, не является недостатком собственно метода перебора; он вообще присущ обратным задачам дифракции.

Таблица 3

Предельные значения уровня шума при одном измерении поля

n_0	8	16	24	32	40
$\bar{v}_0$	$1.25 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-5}$

Одним из путей решения задачи повышения допустимого уровня шума является введение дополнительных точек «наблюдения»; обозначим эти точки через x_*^l .

Расположим точки наблюдения вокруг области неоднородности на окружности радиуса $0,8\lambda$ с центром в точке $(0,6\lambda; 0,6\lambda)$. Такой выбор точек, расположенных несимметрично относительно центра исследуемой области, осуществлен намеренно (см. рис. 2,б). Симметричное расположение точек наблюдения (а в особенности на осях симметрии области Q) приводит к принципиальной невозможности однозначного решения обратной задачи дифракции.

Использование нескольких точек для вычисления значений поля позволило увеличить (от 3 до 8 раз) предельно допустимый уровень шума: данные экспериментов приведены в табл. 4.

Таблица 4

Предельные значения уровня шума при нескольких измерениях поля

n_0	8	16	24	32	40
$\bar{\varepsilon}_v(n_{obs} = 1)$	$1,25 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-5}$
$\bar{\varepsilon}_v(n_{obs} = 4)$	$3,5 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-5}$	$8 \cdot 10^{-4}$
$\bar{\varepsilon}_v(n_{obs} = 8)$	$4,5 \cdot 10^{-2}$	$2,5 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-5}$	$4 \cdot 10^{-4}$

Несмотря на то, что при численном решении обратной задачи дифракции задачи используется равномерная прямоугольная сетка, метод перебора позволяет определить местоположение подобластей неоднородности иной формы.

Рассмотрим в области Q с равномерной сеткой (шаг сетки – h) две подобласти (рис. 4): $B = B_r(C)$ – круг радиуса $r = h / \sqrt{\pi}$ с центром в точке

$C(\lambda/2 + h/2, \lambda/2 + h/2)$ и $B_{r_1}(C_1) \cup B_{r_1}(C_2)$ – объединение двух кругов радиуса $r_1 = h/\sqrt{2\pi}$ с центром в точках $C_1(\lambda/2 + h/2 - r_1, \lambda/2)$ и $C_2(\lambda/2 + h/2 + r_1, \lambda/2)$. Площадь областей B и Q_1 равна h^2 , и, следовательно, поле, рассеянное препятствием с такими включениями, близко по значениям к полю, рассеянному препятствием Q с квадратной подобластью неоднородности Q_{m_0} .

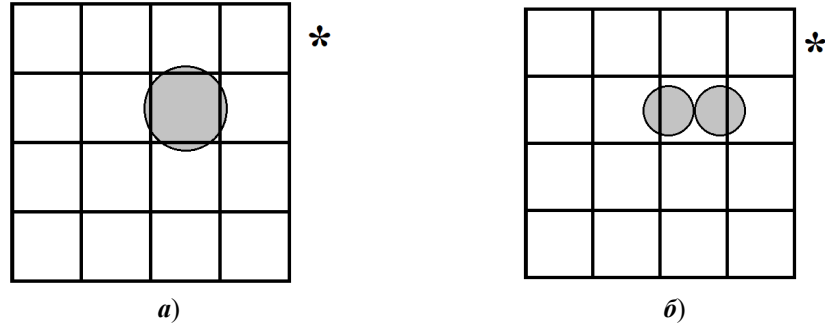


Рис. 4. Область неоднородности Q с включениями двух видов:
 $B_r(C)$ (а) и $B_{r_1}(C_1) \cup B_{r_1}(C_2)$ (б)

Графики целевой функции $f(m)$, отвечающие вышеописанным типам неоднородности, представлены на рис. 5. Один из графиков намеренно смещен вправо, так значения целевой функции в двух рассмотренных случаях (как, возможно, и вообще для случаев с равновеликими подобластями) очень близки.

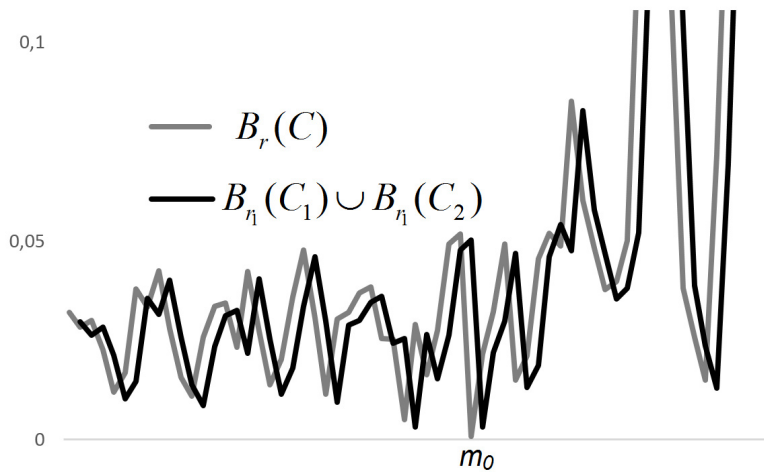


Рис. 5. Функция ошибки для подобластей сложной формы

Из представленных результатов видно, что минимум $f(m)$ в обоих случаях достигается при значении $m = m_0$, отвечающем истинному располо-

жению подобластей неоднородности. Отметим, что для решения задачи об определении местоположения сложного включения необходимо существенно повышать точность численного интегрирования для максимально точного учета формы этого включения.

Заключение

Описан и протестирован метод полного перебора для решения задачи локализации области неоднородности заданной формы с известным коэффициентом преломления. Показано, что метод является эффективным для локализации областей, равновеликих ячейке расчетной сетки; при этом сама форма области может быть достаточно сложной. Экспериментальным образом установлены предельно допустимые значения на уровень зашумления данных – значений поля в ближней зоне. Показано, что при использовании значений поля в нескольких точках (при вычислении целевой функции) предельно допустимый уровень шума может быть увеличен.

Список литературы

1. Bakushinsky A. B., Kokurin M. Y. Iterative methods for approximate solution of inverse problems. New York : Springer, 2004.
2. Смирнов Ю. Г., Цупак А. А. О единственности решения обратной задачи дифракции на неоднородном теле с кусочно-гельдеровым показателем преломления в специальном классе функций // Доклады Академии наук. 2019. Т. 485, № 5. С. 545–547.
3. Medvedik M. Yu., Smirnov Yu. G., Tsupak A. A. Non-iterative two-step method for solving scalar inverse 3D diffraction problem // Inverse Problems in Science and Engineering. 2020. Vol. 28, № 10. P. 1474–1492.
4. Medvedik M. Y., Smirnov Y. G., Tsupak A. A. Inverse vector problem of diffraction by inhomogeneous body with a piecewise smooth permittivity // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. 2024. Vol. 32, № 3. P. 453–465.
5. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М. : Наука, 1981.
6. Smirnov Y. G., Tsupak A. A. Direct and Inverse Scalar Scattering Problems for the Helmholtz Equation In $\mathbb{R}^m$ // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. 2022. Vol. 30, № 1. P. 101–116.
7. Miller K. S. On the Inverse of the Sum of Matrices // Mathematics Magazine. 1981. Vol. 54, № 2. P. 67–72.

References

1. Bakushinsky A.B., Kokurin M.Y. *Iterative methods for approximate solution of inverse problems*. New York: Springer, 2004.
2. Smirnov Yu.G., Tsupak A.A. On the uniqueness of the solution of the inverse problem of diffraction by an inhomogeneous body with a piecewise-Holder refractive index in a special class of functions. *Doklady Akademii nauk = Reports of the Academy of Sciences*. 2019;485(5):545–547. (In Russ.)
3. Medvedik M.Yu., Smirnov Yu.G., Tsupak A.A. Non-iterative two-step method for solving scalar inverse 3D diffraction problem. *Inverse Problems in Science and Engineering*. 2020;28(10):1474–1492.
4. Medvedik M.Y., Smirnov Y.G., Tsupak A.A. Inverse vector problem of diffraction by inhomogeneous body with a piecewise smooth permittivity. *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*. 2024;32(3):453–465.

5. Vladimirov V.S. *Uravneniya matematicheskoy fiziki = Equations of Mathematical Physics*. Moscow: Nauka, 1981. (In Russ.)
6. Smirnov Y.G., Tsupak A.A. Direct and Inverse Scalar Scattering Problems for the Helmholtz Equation In. *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*. 2022;30(1):101–116.
7. Miller K.S. On the Inverse of the Sum of Matrices. *Mathematics Magazine*. 1981;54(2):67–72.

Информация об авторах / Information about the authors

Никита Иванович Терехин

аспирант, Пензенский
государственный университет
(Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

Nikita I. Terekhin

Postgraduate student,
Penza State University
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Алексей Александрович Цупак

кандидат физико-математических наук,
доцент, доцент кафедры математики
и суперкомпьютерного моделирования,
Пензенский государственный
университет (Россия,
г. Пенза, ул. Красная, 40)

Aleksey A. Tsupak

Candidate of physical and mathematical
sciences, associate professor, associate
professor of the sub-department
of mathematics and supercomputer
modeling, Penza State University
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

E-mail: altsupak@yandex.ru

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов / The authors declare no conflicts of interests.

Поступила в редакцию / Received 09.07.2024

Поступила после рецензирования и доработки / Revised 26.08.2024

Принята к публикации / Accepted 13.09.2024